Universidad Simón Bolıvar.
Departamento de Matemáticas puras y aplicadas.
Autoevaluación No. 3 MA2115
Enero 2009

I. Evaluación Teórica.

1. Sea el operador lineal definido como $L[y] := y'' + p(t)y' + q(t)y$, donde $I \subset \mathbb{R}$, y $p(t), q(t)$ son funciones continuas $\forall t \in I$.

   a) Si y_1 y y_2 son soluciones de la identidad $L[y] = g(t)$, con $g(t)$ contínua $\forall t \in I$, entonces $y_1 - y_2$ es solución de $L[y] = 0$.

   b) Si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de $L[y] = 0$ y consideramos $\phi(t)$ una solución de $L[y] = g(t)$, entonces toda solución de la ecuación $L[y] = g(t)$ se expresa como

   $$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \phi(t), \quad \forall t \in I.$$

2. Sean $\subset \mathbb{R}$, $\{a_k(x)\}_{k=0}^{n}$ funciones contínuas $\forall t \in I$, y consideremos $y_1, \cdots, y_n$ soluciones de la ecuación diferencial

   $$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_0 y = 0, \quad \forall x \in I.$$

   Si $W[y_1, \cdots, y_n]$ es idénticamente igual a cero en I, entonces $y_1, \cdots, y_n$ son linealmente dependientes en $C(I)$; es decir el espacio de las funciones contínuas sobre I.

3. Sean $I \subset \mathbb{R}$, $a_2(x), a_1(x)$ funciones contínuas $\forall x \in I$. Si y_1, y_2 son soluciones de $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ y $a_2(x) \neq 0$, entonces

   $$W[y_1.y_2] = ce^{-\ \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}, \quad \text{con} \quad c \in \mathbb{R}.$$

4. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $K \in \mathbb{R}^n$ tales que $(A - \lambda I)^2 K = 0$. Verificar que $X(t) = e^{\lambda t}[K + t(A - \lambda I)K]$ es solución del problema

   $$\begin{cases} X'(t) = AX \\ X(0) = K \end{cases}$$

II. Evaluación Práctica.

1. Hallar la solución general del sistema lineal homogéneo $X'(t) = AX$, si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Hallar una solución particular para el sistema lineal no homogéneo $X'(t) = AX + G(t)$, si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad G(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Resolver $y'' + 2y + +5y = 4e^{-x}\cos(2x)$, con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4. Resolver $x^2y'' + xy' + y = 2\tan(\ln x)$.

Respuestas.

I. Parte teórica.

1. a)Basta ver que

$$L[y_1 - y_2] = L[y_1] - L[y_2] = g(t) - g(t) = 0.$$

b)Sea $y(t)$ una solución cualquiera de $L[y] = g(t)$. Por la parte a), la función $y(t) - \phi(t)$ satisface $L[y - \phi] = 0$ y por el teorema de existencia y unicidad, toda solución de $L[y] = 0$ debe ser una combinación lineal de y_1, y_2. Por lo tanto,

$$y(t) - \phi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

gracias a la independencia lineal de y_1 y y_2. En consecuencia,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \phi(t) \quad \forall t \in I.$$

2. Sea $x_0 \in I$ fijo e arbitrario. Consideremos el sistema

$$\begin{array}{rcl} c_1 y_1(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) & = & 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + ... + c_n y_n'(x_0) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}(x_0) + ... + c_n \dfrac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}}(x_0)(x_0) & = & 0 \end{array}$$

en las incógnitas $c_1, ...c_n$. Debido a que $W[y_1, \cdots, y_n](x) = 0$, $\forall x \in I$, el determinante del sistema anterior es cero y el sistema tiene una solución no trivial $(a_1, ...a_n)$. Por lo tanto,

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i(x)$$

satisface la ecuación

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_0 y = 0,$$

$$y(x_0) = y'(x_0) = ... = \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}}(x_0)(x_0) = 0.$$

Pero, $y = 0$ es también solución del problema y por el teorema de existencia y unicidad

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Luego, la dependencia de las $\{y_j\}_{j=1}^{n}$, se sigue del hecho de que las $(a_1, ...a_n)$ no son todas cero.

3. Consideremos y_1, y_2 dos soluciones de $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}W[y_1, y_2](x) &= \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\
&= \frac{d}{dx}\{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\} \\
&= y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x) \\
&= -y_1(x)[\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y_2'(x) + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y_2(x)] + y_2(x)[\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y_1'(x) + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y_1(x)] \\
&= -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}[y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)] \\
&= -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}W[y_1, y_2](x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}W[y_1, y_2](x) = -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}W[y_1, y_2](x),$$

$$\frac{dW[y_1, y_2]}{W[y_1, y_2]} = -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx$$

lo que implica, al integrar y despejar que,

$$W[y_1.y_2] = ce^{-\quad \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx} \quad \text{con} \quad c \in \mathbb{R}.$$

4. Derivando respecto a la variable t, obtenemos

$$X'(t) = e^{\lambda t}[(A - \lambda I)Kt + AK].$$

Por otra parte,

$$AX = Ae^{\lambda t}[K + t(A - \lambda I)K] = e^{\lambda t}[AK + (A - \lambda I)Kt].$$

Comparando ambas identidades concluimos que $X' = AX$. Además, evaluando $X(0) = K$.

II. Ejercicios prácticos.

1. Calculamos el polinomio característico, el cual factorizamos mediante Ruffini,

$$p(\lambda) = Det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Por lo tanto, los autovalores de A son $\lambda = 1$, (cero de orden 2 de p) y $\lambda = -2$, (cero simple de p).
Ahora, vamos a calcular los autovectores para determinar las soluciones fundamentales. Si $\lambda = -2$, hallamos v tal que $(A + 2I)v = 0$. Observando que

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{es equivalente a} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

concluimos que un autovector puede ser escogido como $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
En consecuencia una solución fundamental es

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Si $\lambda = 1$, buscamos v tal que $(A - I)v = 0$. Pero,

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{es equivalente a} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

lo que nos permite concluir que un autovector puede ser escogido como $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. En consecuencia, otra solución fundamental es

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}.$$

Finalmente, para hallar la tercera solución fundamental, consideramos una solución de la forma

$$X_3(t) = (u + tv)e^t,$$

con u y v a determinar. Derivando respecto a t

$$X_3'(t) = ve^t + (u + tv)e^t$$

y dado que $X_3' = AX_3$, al sustituir en esta última igualdad, concluimos que u y v deben satisfacer:

$$\begin{cases} (A - I)u = v \\ (A - I)v = 0. \end{cases}$$

Escogiendo $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y sustituyendo en $(A - I)u = v$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -u_1 - u_3 = 1 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \\ 2u_2 = -1 \end{cases}$$

donde denotamos $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$. Resolviendo el mismo, concluimos que $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y en consecuencia,

$$X_3(t) = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} t \right] e^t.$$

De esta manera, la solución general al problema es

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + c_3 X_3(t), \quad \text{con} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

2. Consideramos la matriz cuyas columnas están conformadas por las soluciones fundamentales de la ecuación homogénea,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^t & (t-1)e^t \\ -3e^{-2t} & 0 & -e^t/2 \\ 2e^{-2t} & -e^t & -te^t \end{pmatrix},$$

Ahora, $\det\Phi(t) = -7/2$ y como la matriz inversa viene dada por $\Phi^{-1}(t) = -\frac{2}{7}\mathrm{Adj}\Phi(t)$, tenemos que explícitamente,

$$\Phi^{-1}(t) = -\frac{2}{7}\begin{pmatrix} -e^{2t}/2 & e^{2t} & -e^{2t}/2 \\ -(3t-1)e^{-t} & (1-3t)e^{-t} & (3t-\frac{7}{2})e^{-t} \\ 3e^{-t} & 3e^{-t} & -3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Pero, la solución particular $X_p(t)$ satisface $X_p'(t) = \Phi^{-1}(t)G(t)$, en consecuencia, al multiplicar obtenemos

$$X_p'(t) = -\frac{2}{7}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + e^{3t} \\ -(3t+1)e^{-3t} - 3t + 1 \\ 3e^{-3t} + 3 \end{pmatrix},$$

e integrando coordenada a coordenada, obtenemos que la solución particular es

$$X_p(t) = -\frac{2}{7}\begin{pmatrix} -\frac{t}{2} + \frac{e^{3t}}{3} \\ -\frac{3t^2}{2} + t + \frac{2e^{-3t}}{3} - te^{-3t} \\ -e^{-3t} + 3t \end{pmatrix}.$$

3. Aplicaremos el método de los coeficientes indeterminados. Observando que $4e^{-x}\cos(2x) = \mathrm{Real}(4e^{(2i-1)x})$, entonces consideramos el problema asociado

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 4e^{(2i-1)x}, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

Al resolver $y'' + 2y' + 5y = 0$, tenemos que el polinomio característico es $p(r) = r^2 + 2r + 5$, cuyas raíces son $r_1 = 2i - 1$ y $r_2 = -2i - 1$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y(x) = c_1 e^{-x}\cos(2x) + c_2 e^{-x}\mathrm{sen}(2x).$$

Dado que $z_0 = 2i - 1$ es raíz de $p(r)$, para hallar una solución particular, buscamos una de la forma $\phi(t) = A_0 x e^{(2i-1)x}$, con A_0 a determinar. Derivando obtenemos que

$$\phi'(t) = A_0 e^{(2i-1)x} + A_0 x(2i-1)e^{(2i-1)x},$$

$$\phi''(t) = 2A_0(2i-1)e^{(2i-1)x} + A_0x(2i-1)^2e^{(2i-1)x}.$$

Por lo tanto, al sustituir en $y = \phi$ y sus derivadas en

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{(2i-1)x},$$

concluimos, al despejar que $A_0 = -i$. Pero,

$$-ixe^{(2i-1)x} = -ixe^{-x}\cos(2x) + xe^{-x}\text{sen}(2x),$$

y tomando la parte real de la identidad anterior, concluimos que la solución general al problema no homogéneo es,

$$y(x) = c_1e^{-x}\cos(2x) + c_2e^{-x}\text{sen}(2x) + xe^{-x}\text{sen}(2x).$$

Además,

$$\begin{aligned} y'(x) = &-e^{-x}(c_1\cos(2x) + c_2\text{sen}(2x) + x\text{sen}(2x)) + \\ &e^{-x}[-2c_1\text{sen}(2x) + 2c_2\cos(2x) + \text{sen}(2x) + 2x\cos(2x)] \end{aligned}$$

Como $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, obtenemos al evaluar en las identidades anteriores que $c_1 = 1$ y $c_2 = 1/2$. Entonces, la solución al problema es

$$y(x) = e^{-x}\cos(2x) + \frac{1}{2}e^{-x}\text{sen}(2x) + xe^{-x}\text{sen}(2x).$$

4. La ecuación es de Euler no homogénea. Si hacemos el cambio $x = e^t$, entonces por regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Sustituyendo, la ecuación de Euler considerada se transforma en

$$y'' + y = 2\tan t,$$

la cual vamos a resolver mediante el método de variación de constantes. Primero, resolvemos la ecuación homogénea, cuyo polinomio característico es $r^2 + 1 = 0$. Así $r = \pm i$ y la solución general de la ecuación homogénea es

$$y(t) = c_1\cos(t) + c_2\text{sen}(t).$$

En consecuencia, consideramos una solución de la forma

$$y(t) = c_1(t)\cos(t) + c_2(t)\mathrm{sen}(t), \tag{1}$$

donde $c_1(t)$ y $c_2(t)$ son funciones tales que

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\mathrm{sen}t = 0 \\ c_1'(t)\mathrm{sen}t + c_2'(t)\cos t = 2\tan t. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, llegamos a que

$$c_1'(t) = -2\tan t\,\mathrm{sen}t = -2(\sec t - \cos t)$$

$$c_2'(t) = -2\cos t\tan t = 2\mathrm{sen}t$$

e integrando cada igualdad, concluimos que

$$c_1(t) = -2\ln|\sec t + \tan t| + 2\mathrm{sen}t + k_1,$$

$$c_2(t) = -2\cos t + k_2$$

En consecuencia, sustituyendo $c_1(t), c_2(t)$ en (1), la solución general es

$$y(t) = k_1\cos t + k_2\mathrm{sen}t + (-2\ln|\sec t + \tan t| + 2\mathrm{sen}t)\cos t - 2\cos t\,\mathrm{sen}t$$

y devolviendo el cambio, concluimos que la solución general de la ecuación de Euler es

$$y(x) = k_1\cos(\ln x) + k_2\mathrm{sen}(\ln x)t + (-2\ln|\sec(\ln x) + \tan(\ln x)| + 2\mathrm{sen}(\ln x))\cos(\ln x) - 2\cos(\ln x)\mathrm{sen}(\ln x).$$

Nota: Observaciones y sugerencias escribir a iathamai@usb.ve